गणित भाग II (भूमिती)

दहावी (SSC) बोर्ड परीक्षा मार्च 2027 – सराव प्रश्नपत्रिका क्र. 2

आदर्श उत्तरपत्रिका

वेळ: 2 तास **एकूण गुण: 40**

आदर्श उत्तरात एक योग्य पद्धत दाखवली आहे; इतर कोणतीही योग्य पद्धत असल्यास पूर्ण गुण मिळतात.

प्र. 1 (अ) खालील प्रत्येक उपप्रश्नासाठी चार पर्यायी उत्तरे दिली आहेत. त्यांपैकी अचूक पर्याय निवडून त्याचे वर्णाक्षर उपप्रश्नाच्या क्रमांकासह लिहा. **[4]**

(1) दोन त्रिकोणांच्या उंची समान आहेत. त्यांचे पाये 6 सेमी व 15 सेमी आहेत. तर त्यांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर किती?

(A) 4 : 25 (B) 2 : 5
(C) 5 : 2 (D) 3 : 5

उत्तर (1 गुण)
(B) 2 : 5
समान उंची असलेल्या त्रिकोणांची क्षेत्रफळे त्यांच्या संगत पायांच्या प्रमाणात असतात : 6 : 15 = 2 : 5.

(2) $\triangle PQR$ मध्ये, $\angle Q = 90°$ व $\angle P = 45°$. जर $PR = 6\sqrt{2}$ सेमी, तर बाजू PQ ची लांबी किती?

(A) $6\sqrt{2}$ सेमी (B) 3 सेमी
(C) 6 सेमी (D) 12 सेमी

उत्तर (1 गुण)
(C) 6 सेमी
$\angle R = 180° - 90° - 45° = 45°$, म्हणून 45°–45°–90° प्रमेयानुसार $PQ = (1/\sqrt{2}) \times PR = (1/\sqrt{2}) \times 6\sqrt{2} = 6$ सेमी.

(3) रेषा l वर्तुळाला बिंदू A मध्ये स्पर्श करते. जीवा AB रेषा l शी 48° मापाचा कोन करते. तर या कोनाने अंतर्खंडित केलेल्या कंसाचे माप किती?

(A) 48° (B) 24°
(C) 96° (D) 132°

उत्तर (1 गुण)
(C) 96°
स्पर्शिका-छेदिका कोनाच्या प्रमेयानुसार, कोनाचे माप त्याने अंतर्खंडित केलेल्या कंसाच्या मापाच्या निम्मे असते. ∴ कंसाचे माप = 2 × 48° = 96°.

(4) एका वर्तुळाची त्रिज्या 9 सेमी आहे. या वर्तुळाच्या 40° मापाच्या कंसाची लांबी किती?

(A) π सेमी (B) 2π सेमी
(C) 4π सेमी (D) 9π सेमी

उत्तर (1 गुण)
(B) 2π सेमी
वर्तुळकंसाची लांबी = $(\theta/360) \times 2\pi r = (40/360) \times 2\pi \times 9 = 2\pi$ सेमी.

प्र. 1 (ब) खालील उपप्रश्न सोडवा. **[4]**

(1) (−3, 8) व (7, 2) या बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूचे निर्देशक काढा.

उत्तर (1 गुण)
मध्यबिंदूच्या सूत्रानुसार, मध्यबिंदू = ((−3 + 7)/2, (8 + 2)/2) = (4/2, 10/2)
∴ मध्यबिंदूचे निर्देशक (2, 5) आहेत.

(2) $5\sin^2 37° + 5\cos^2 37°$ ची किंमत काढा.

उत्तर (1 गुण)

$5\sin^2 37° + 5\cos^2 37° = 5(\sin^2 37° + \cos^2 37°) = 5 \times 1$ ...$(\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$

$\therefore 5\sin^2 37° + 5\cos^2 37° = 5$

(3) △PQR मध्ये किरण QS हा ∠PQR चा दुभाजक आहे आणि बिंदू S बाजू PR वर आहे. जर PQ = 8, QR = 10 व PS = 4, तर SR काढा.

उत्तर (1 गुण)

त्रिकोणाच्या कोनदुभाजकाच्या प्रमेयानुसार, PQ/QR = PS/SR

$\therefore 8/10 = 4/SR$

$\therefore SR = (4 \times 10)/8 = 5$

(4) एका शंकूच्या तळाचे क्षेत्रफळ 45 चौसेमी व उंची 8 सेमी आहे. तर शंकूचे घनफळ काढा.

उत्तर (1 गुण)

शंकूचे घनफळ = (1/3) × तळाचे क्षेत्रफळ × उंची = (1/3) × 45 × 8

∴ शंकूचे घनफळ = 120 घसेमी

प्र. 2 (अ) खालील उपकृती पूर्ण करा. (कोणत्याही दोन) **[4]**

(1) आकृतीत, वर्तुळाच्या जीवा AB व जीवा CD यांना सामावणाऱ्या वृत्तछेदिका परस्परांना वर्तुळाच्या बाह्यभागातील बिंदू P मध्ये छेदतात. जर PA = 4, AB = 5 व PC = 3, तर CD काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

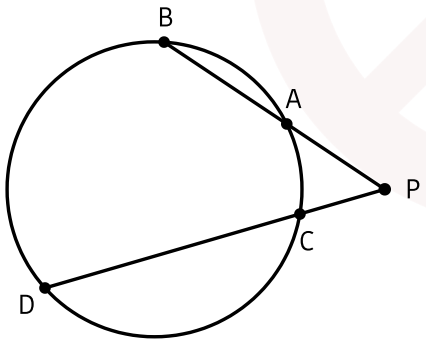
कृती : PB = PA + AB = 4 + 5 = 9

PA × PB = PC × ☐ ...(☐)

∴ 4 × 9 = 3 × PD

∴ PD = ☐

∴ CD = PD − PC = ☐



उत्तर (2 गुण)

PB = PA + AB = 4 + 5 = 9

PA × PB = PC × **PD** ...(**जीवांच्या बाह्यछेदनाचे प्रमेय**)

∴ 4 × 9 = 3 × PD

∴ PD = 36/3 = **12**

∴ CD = PD − PC = 12 − 3 = **9**

गुणदान: प्रत्येक योग्य चौकट – ½ गुण (4 चौकटी × ½ = 2 गुण)

परीक्षकांचा सल्ला: बाहेरील बिंदू P पासून दोन्ही वृत्तछेदिकांचे रेषाखंड (PA व PB, PC व PD) घ्या; जीवांच्या लांबी AB व CD घेऊ नका.

(2) जर 35 sin θ = 12 cos θ आणि θ हा लघुकोन असेल, तर sec θ व cos θ काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

कृती : 35 sin θ = 12 cos θ

∴ sin θ/cos θ = 12/35

∴ tan θ = ☐

आता, 1 + $\tan^2\theta$ = ☐ ...(त्रिकोणमितीय नित्यसमानता)

∴ $\sec^2\theta$ = 1 + 144/1225 = ☐

∴ sec θ = 37/35 ...(θ लघुकोन आहे)

∴ cos θ = ☐

उत्तर (2 गुण)

35 sin θ = 12 cos θ

∴ sin θ/cos θ = 12/35

∴ tan θ = **12/35**

आता, 1 + $\tan^2\theta$ = **$\sec^2\theta$** ...(त्रिकोणमितीय नित्यसमानता)

∴ $\sec^2\theta$ = 1 + 144/1225 = **1369/1225**

∴ sec θ = 37/35 ...(θ लघुकोन आहे)

∴ cos θ = 1/sec θ = **35/37**

गुणदान: प्रत्येक योग्य चौकट – ½ गुण (4 चौकटी × ½ = 2 गुण)

परीक्षकांचा सल्ला: √1369 = 37 व √1225 = 35. cos θ = 1/sec θ (sec θ हे cos θ चे व्यस्त गुणोत्तर आहे) – cos θ साठी 37/35 लिहू नका.

(3) आकृतीत, △ABC मध्ये ∠ACB हा लघुकोन आहे आणि रेख AD ⊥ बाजू BC. जर BC = 17, AC = 25 व DC = 7, तर AB काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

कृती : △ABC मध्ये, ∠C लघुकोन आहे व रेख AD ⊥ बाजू BC.

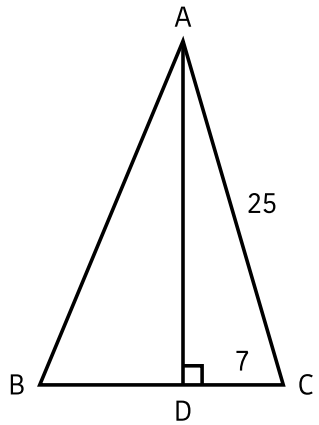
∴ $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times$ ☐ ...(पायथागोरसच्या प्रमेयाचे उपयोजन)

∴ $AB^2 = 17^2 + 25^2 - 2 \times 17 \times 7$

∴ AB^2 = 289 + 625 – ☐

∴ AB^2 = ☐

∴ AB = ☐



उत्तर (2 गुण)

△ABC मध्ये, ∠C लघुकोन आहे व रेख AD ⊥ बाजू BC.

∴ $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times$ **DC** ...(पायथागोरसच्या प्रमेयाचे उपयोजन)

∴ $AB^2 = 17^2 + 25^2 - 2 \times 17 \times 7$

∴ AB^2 = 289 + 625 – **238**

∴ AB^2 = **676**

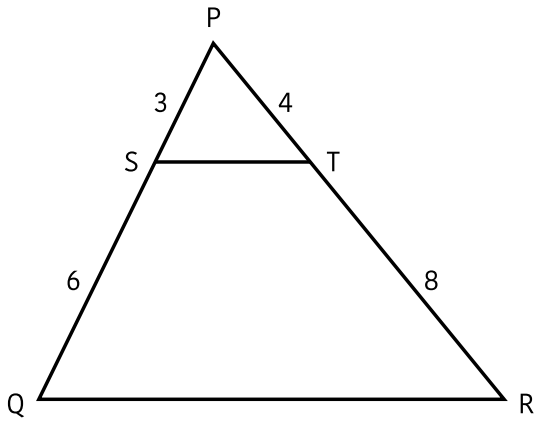
∴ AB = **26**

गुणदान: प्रत्येक योग्य चौकट – ½ गुण (4 चौकटी × ½ = 2 गुण)

परीक्षकांचा सल्ला: लघुकोनासमोरील बाजूसाठी 2BC × DC हे पद वजा केले जाते; विशालकोनासमोरील बाजूसाठी ते मिळवले जाते.

प्र. 2 (ब) खालील उपप्रश्न सोडवा. (कोणतेही चार) **[8]**

(1) आकृतीत, △PQR च्या बाजू PQ वर बिंदू S व बाजू PR वर बिंदू T आहे. जर PS = 3, SQ = 6, PT = 4 व TR = 8, तर रेख ST ∥ बाजू QR आहे का? कारण लिहा.



उत्तर (2 गुण)

PS/SQ = 3/6 = 1/2 ...(I)

PT/TR = 4/8 = 1/2 ...(II)

(I) व (II) वरून, PS/SQ = PT/TR

∴ रेख ST ∥ बाजू QR ...(प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयाचा व्यत्यास)

गुणदान: PS/SQ = 1/2 – ½ गुण · PT/TR = 1/2 – ½ गुण · कारणासह (प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयाचा व्यत्यास) ST ∥ QR हा निष्कर्ष – 1 गुण

परीक्षकांचा सल्ला: येथे रेषा समांतर आहेत हे सिद्ध करायचे आहे, म्हणून कारण प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयाचा व्यत्यास हे आहे.

(2) एक आयताकृती लोखंडी फाटक 1.5 मी रुंद व 2 मी उंच आहे. ते मजबूत करण्यासाठी त्याच्या एका कर्णावर एक सरळ लोखंडी पट्टी बसवली आहे. तर त्या पट्टीची लांबी काढा.

उत्तर (2 गुण)

समजा, □ABCD हे फाटक आहे; AB = 1.5 मी, BC = 2 मी आणि कर्ण AC = पट्टीची लांबी.

△ABC मध्ये, ∠ABC = 90° ...(आयताचा कोन)

पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार,

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 1.5^2 + 2^2 = 2.25 + 4 = 6.25$

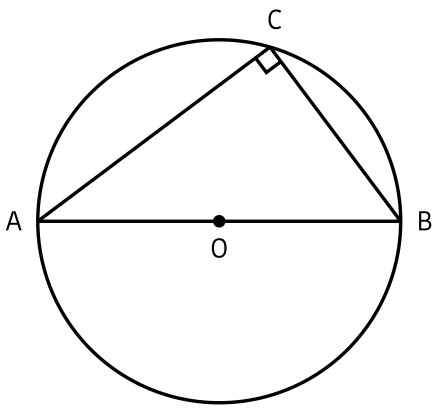
∴ AC = 2.5

∴ लोखंडी पट्टीची लांबी 2.5 मी आहे.

गुणदान: काटकोन दाखवून पायथागोरसचे प्रमेय वापरणे – ½ गुण · किमती ठेवणे – ½ गुण · $AC^2 = 6.25$ – ½ गुण · लांबी 2.5 मी – ½ गुण

परीक्षकांचा सल्ला: $\sqrt{6.25} = 2.5$; अंतिम उत्तरात एकक (मी) लिहा.

(3) आकृतीत, O केंद्र असलेल्या वर्तुळाचा रेख AB हा व्यास आहे. बिंदू C वर्तुळावर आहे. जर AC = 16 सेमी व BC = 12 सेमी, तर वर्तुळाची त्रिज्या काढा.



उत्तर (2 गुण)

$\angle ACB = 90°$ ...(अर्धवर्तुळात अंतर्लिखित केलेला कोन काटकोन असतो)

$\triangle ACB$ मध्ये, पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार,

$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 16^2 + 12^2 = 256 + 144 = 400$

$\therefore AB = 20$ सेमी

त्रिज्या $= AB/2 = 20/2$

$\therefore$ वर्तुळाची त्रिज्या = 10 सेमी

गुणदान: कारणासह $\angle ACB = 90°$ – ½ गुण · पायथागोरसचे प्रमेय व किमती ठेवणे – ½ गुण · AB = 20 सेमी – ½ गुण · त्रिज्या = 10 सेमी – ½ गुण

परीक्षकांचा सल्ला: AB हा व्यास आहे; त्रिज्येसाठी त्याचा निम्मा घ्या.

(4) एका वर्तुळाचे केंद्र O(2, −3) असून ते P(7, 9) या बिंदूतून जाते. तर वर्तुळाची त्रिज्या काढा. जर रेख PQ हा या वर्तुळाचा व्यास असेल, तर बिंदू Q चे निर्देशक काढा.

उत्तर (2 गुण)

त्रिज्या $= OP = \sqrt{[(7-2)^2 + (9-(-3))^2]} = \sqrt{(25 + 144)} = \sqrt{169} = 13$

$\therefore$ त्रिज्या = 13 एकक

रेख PQ हा व्यास आहे, म्हणून O हा रेख PQ चा मध्यबिंदू आहे. समजा, Q(x, y).

$(7 + x)/2 = 2 \Rightarrow x = -3$ आणि $(9 + y)/2 = -3 \Rightarrow y = -15$

$\therefore$ Q चे निर्देशक (−3, −15) आहेत.

गुणदान: अंतराचे सूत्र व किमती ठेवणे – ½ गुण · त्रिज्या = 13 एकक – ½ गुण · मध्यबिंदूच्या सूत्राचा वापर – ½ गुण · Q(−3, −15) – ½ गुण

परीक्षकांचा सल्ला: वर्तुळाचे केंद्र हा कोणत्याही व्यासाचा मध्यबिंदू असतो; x व y काढताना चिन्हांकडे लक्ष द्या.

(5) 14 सेमी त्रिज्येच्या वर्तुळाच्या एका वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ 154 चौसेमी आहे. तर त्या वर्तुळपाकळीच्या कंसाची लांबी काढा.

उत्तर (2 गुण)

r = 14 सेमी, A = 154 चौसेमी

वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ = (वर्तुळकंसाची लांबी × त्रिज्या)/2

$\therefore 154 = (l \times 14)/2$

$\therefore 154 = 7l$

$\therefore l = 22$

$\therefore$ वर्तुळकंसाची लांबी = 22 सेमी

गुणदान: सूत्र $A = (l \times r)/2$ – ½ गुण · किमती ठेवणे – ½ गुण · सरळरूप – ½ गुण · $l = 22$ सेमी – ½ गुण

परीक्षकांचा सल्ला: $A = lr/2$ हा संबंध वापरल्यास आधी कोन काढावा लागत नाही. (आधी $\theta = 90°$ काढून मग कंसाची लांबी काढणाऱ्या विद्यार्थ्यांनाही पूर्ण गुण मिळतात.)

प्र. 3 (अ) खालील उपकृती पूर्ण करा. (कोणतीही एक) **[3]**

(1) P(−1, 1), Q(4, 2), R(6, 6) व S(1, 5) हे बिंदू समांतरभुज चौकोनाचे शिरोबिंदू आहेत, हे दाखवण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

कृती : रेषा PQ चा चढ = (2 − 1)/(4 − (−1)) = ☐ ...(I)

रेषा QR चा चढ = (6 − 2)/(6 − 4) = ☐ ...(II)

रेषा RS चा चढ = (5 − 6)/(1 − 6) = 1/5 ...(III)

रेषा SP चा चढ = (1 − 5)/(−1 − 1) = ☐ ...(IV)

(I) व (III) वरून, रेषा PQ चा चढ = रेषा RS चा चढ

∴ रेषा PQ ∥ रेषा ☐

(II) व (IV) वरून, रेषा QR चा चढ = रेषा SP चा चढ

∴ रेषा QR ∥ रेषा SP

□PQRS च्या संमुख बाजूंच्या दोन्ही जोड्या समांतर आहेत.

∴ □PQRS हा ☐ आहे.

उत्तर (3 गुण)

रेषा PQ चा चढ = (2 − 1)/(4 − (−1)) = **1/5** ...(I)

रेषा QR चा चढ = (6 − 2)/(6 − 4) = **2** ...(II)

रेषा RS चा चढ = (5 − 6)/(1 − 6) = 1/5 ...(III)

रेषा SP चा चढ = (1 − 5)/(−1 − 1) = −4/−2 = **2** ...(IV)

(I) व (III) वरून, रेषा PQ चा चढ = रेषा RS चा चढ

∴ रेषा PQ ∥ रेषा **RS**

(II) व (IV) वरून, रेषा QR चा चढ = रेषा SP चा चढ

∴ रेषा QR ∥ रेषा SP

□PQRS च्या संमुख बाजूंच्या दोन्ही जोड्या समांतर आहेत.

∴ □PQRS हा **समांतरभुज चौकोन** आहे.

गुणदान: 1/5 – ½ गुण · 2 (QR चा चढ) – ½ गुण · 2 (SP चा चढ) – ½ गुण · RS – ½ गुण · समांतरभुज चौकोन – 1 गुण

परीक्षकांचा सल्ला: (1 − 5)/(−1 − 1) = (−4)/(−2) = 2 : दोन ऋण संख्यांच्या भागाकाराने धन चढ मिळतो.

(2) (1 + sec θ)(1 − cos θ) = sin θ tan θ हे सिद्ध करण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

कृती : डावी बाजू = (1 + sec θ)(1 − cos θ)

= 1 − cos θ + sec θ − sec θ cos θ

= 1 − cos θ + sec θ − ☐ ...(∵ sec θ × cos θ = 1)

= sec θ − cos θ

= 1/cos θ − cos θ

= ☐/cos θ

= ☐/cos θ ...(∵ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$)

= sin θ × ☐

= sin θ tan θ

= उजवी बाजू

उत्तर (3 गुण)

डावी बाजू = (1 + sec θ)(1 − cos θ)

= 1 − cos θ + sec θ − sec θ cos θ

= 1 − cos θ + sec θ − **1** ...(∵ sec θ × cos θ = 1)

= sec θ − cos θ

= 1/cos θ − cos θ

= **(1 − $\cos^2\theta$)**/cos θ

= **$\sin^2\theta$**/cos θ ...(∵ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$)

= sin θ × **(sin θ/cos θ)**

= sin θ tan θ

= उजवी बाजू

∴ (1 + sec θ)(1 − cos θ) = sin θ tan θ. हे सिद्ध झाले.

गुणदान: 1 – ½ गुण · (1 − $\cos^2\theta$) – 1 गुण · $\sin^2\theta$ – 1 गुण · sin θ/cos θ – ½ गुण

परीक्षकांचा सल्ला: चारही पदांचा गुणाकार काळजीपूर्वक करा; sec θ × cos θ = 1 या पायरीमुळेच दोन्ही 1 एकमेकांना रद्द करतात.

प्र. 3 (ब) खालील उपप्रश्न सोडवा. (कोणतेही दोन) **[6]**

(1) O केंद्र व 2.8 सेमी त्रिज्या असलेले वर्तुळ काढा. केंद्रापासून 6.4 सेमी अंतरावर बिंदू M घ्या. बिंदू M मधून वर्तुळाला स्पर्शिका काढा.

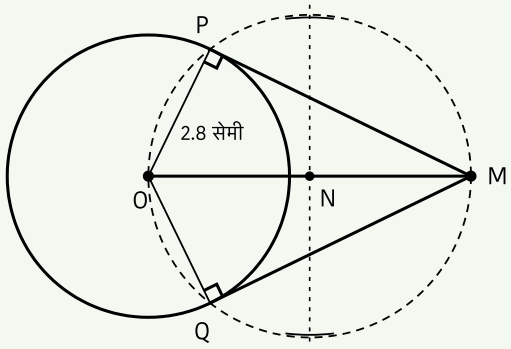
उत्तर (3 गुण)

विश्लेषण : MP ही P बिंदूतील स्पर्शिका असेल, तर ∠OPM = 90° ...(स्पर्शिका-त्रिज्या प्रमेय). म्हणून P हा रेख OM व्यास असलेल्या वर्तुळावर आहे (अर्धवर्तुळात अंतर्लिखित केलेला कोन काटकोन असतो). म्हणून रेख OM व्यास असलेले वर्तुळ काढा; ते दिलेल्या वर्तुळाला स्पर्शबिंदूंमध्ये छेदते.

रचनेच्या पायऱ्या :

1. O केंद्र व 2.8 सेमी त्रिज्या घेऊन वर्तुळ काढा.
2. OM = 6.4 सेमी होईल असा बिंदू M घ्या व रेख OM काढा.
3. रेख OM चा लंबदुभाजक काढा व OM च्या मध्यबिंदूला N नाव द्या.
4. N केंद्र व NO (= 3.2 सेमी) त्रिज्या घेऊन वर्तुळ काढा. ते दिलेल्या वर्तुळाला P व Q बिंदूंत छेदते.
5. रेषा MP व रेषा MQ काढा.

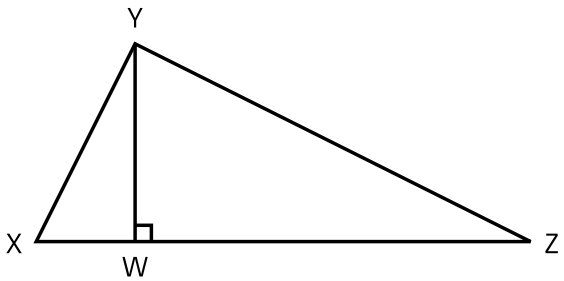
रेषा MP व रेषा MQ या अपेक्षित स्पर्शिका आहेत. (मोजल्यास MP = MQ ≈ 5.8 सेमी.)



गुणदान: 2.8 सेमी त्रिज्येचे वर्तुळ व OM = 6.4 सेमी असलेला बिंदू M – 1 गुण · OM चा लंबदुभाजक, मध्यबिंदू N व OM व्यास असलेले वर्तुळ – 1 गुण · स्पर्शिका MP व MQ काढून नावे देणे – 1 गुण

परीक्षकांचा सल्ला: लंबदुभाजक काढताना केलेले कंस पुसू नका; परीक्षक त्यांना गुण देतात.

(2) आकृतीत, △XYZ मध्ये ∠XYZ = 90° आणि रेख YW ⊥ बाजू XZ. जर XW = 4 व WZ = 16, तर YW, XY व YZ काढा.



उत्तर (3 गुण)

△XYZ मध्ये, ∠XYZ = 90° आणि रेख YW ⊥ कर्ण XZ.

∴ YW^2 = XW × WZ ...(भूमितीमध्याचे प्रमेय)

∴ YW^2 = 4 × 16 = 64

∴ YW = 8

△XWY मध्ये, ∠XWY = 90°, पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार,

$XY^2 = XW^2 + YW^2 = 16 + 64 = 80$

∴ $XY = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

△YWZ मध्ये, ∠YWZ = 90°, पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार,

$YZ^2 = YW^2 + WZ^2 = 64 + 256 = 320$

∴ $YZ = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$

∴ YW = 8, $XY = 4\sqrt{5}$ व $YZ = 8\sqrt{5}$

गुणदान: भूमितीमध्याच्या प्रमेयाने YW = 8 – 1 गुण · $XY = 4\sqrt{5}$ – 1 गुण · $YZ = 8\sqrt{5}$ – 1 गुण

परीक्षकांचा सल्ला: पडताळा : $XY^2 + YZ^2 = 80 + 320 = 400 = 20^2 = XZ^2$, म्हणून उत्तरे सुसंगत आहेत.

(3) माल भरलेल्या ट्रॉली 0.75 मी उंचीच्या फलाटावर (प्लॅटफॉर्मवर) ढकलत नेता याव्यात म्हणून एक सरळ उतार (रॅम्प) बांधला आहे. हा उतार क्षितिजसमांतर जमिनीशी 30° मापाचा कोन करतो. तर उताराची लांबी आणि त्याने जमिनीवर व्यापलेले क्षितिजसमांतर अंतर काढा. ($\sqrt{3} = 1.73$)

उत्तर (3 गुण)

आकृतीत, AC हा उतार आहे, AB = 0.75 मी ही फलाटाची उंची आहे, BC हे क्षितिजसमांतर अंतर आहे, ∠ABC = 90° व ∠ACB = 30°.

काटकोन △ABC मध्ये,

$\sin 30° = AB/AC$

∴ $1/2 = 0.75/AC$

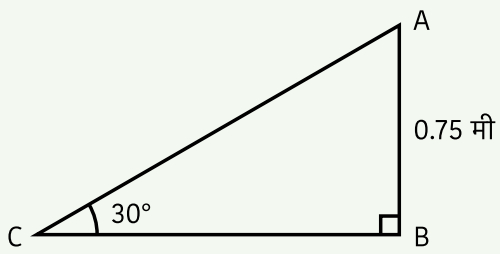
∴ $AC = 2 \times 0.75 = 1.5$ मी

$\tan 30° = AB/BC$

∴ $1/\sqrt{3} = 0.75/BC$

∴ $BC = 0.75\sqrt{3} = 0.75 \times 1.73 = 1.2975 \approx 1.30$ मी

∴ उताराची लांबी = 1.5 मी आणि क्षितिजसमांतर अंतर ≈ 1.30 मी.



गुणदान: काटकोन व 30° दाखवणारी आकृती – 1 गुण · उताराची लांबी AC = 1.5 मी – 1 गुण · क्षितिजसमांतर अंतर $BC = 0.75\sqrt{3} \approx 1.30$ मी – 1 गुण

परीक्षकांचा सल्ला: लांबीसाठी (कर्ण) sin आणि क्षितिजसमांतर बाजूसाठी tan वापरा; $BC = 0.75\sqrt{3}$ मी असे उत्तरही ग्राह्य आहे.

(4) प्लॅस्टिकची एक फुलांची कुंडी शंकूछेदाच्या आकाराची आहे. तिच्या वरच्या व तळाच्या वर्तुळाकार बाजूंच्या त्रिज्या 18 सेमी व 12 सेमी असून उंची 14 सेमी आहे. कुंडी काठोकाठ भरण्यासाठी किती लीटर माती लागेल? ($\pi = 22/7$, 1 लीटर = 1000 घसेमी)

उत्तर (3 गुण)

$r_1 = 18$ सेमी, $r_2 = 12$ सेमी, h = 14 सेमी

शंकूछेदाचे घनफळ $= (1/3)\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 \times r_2)$

$= (1/3) \times (22/7) \times 14 \times (18^2 + 12^2 + 18 \times 12)$

$= (1/3) \times 44 \times (324 + 144 + 216)$

$= (1/3) \times 44 \times 684$

$= 44 \times 228$

= 10032 घसेमी

= 10032/1000 लीटर = 10.032 लीटर

∴ कुंडी भरण्यासाठी 10.032 लीटर माती लागेल.

गुणदान: शंकूछेदाच्या घनफळाचे सूत्र – 1 गुण · किमती ठेवणे व घनफळ 10032 घसेमी – 1 गुण · 10.032 लीटर – 1 गुण

परीक्षकांचा सल्ला: शंकूछेदाच्या सूत्रात तीन पदे आहेत : r_1^2, r_2^2 आणि $r_1 \times r_2$; विद्यार्थी अनेकदा गुणाकाराचे पद विसरतात.

प्र. 4 खालील उपप्रश्न सोडवा. (कोणतेही दोन) **[8]**

(1) त्रिकोणाच्या एका बाजूला समांतर असणारी रेषा त्याच्या उरलेल्या बाजूंना भिन्न बिंदूंत छेदत असेल, तर ती रेषा त्या बाजूंना एकाच प्रमाणात विभागते, हे सिद्ध करा.

उत्तर (4 गुण)

पक्ष : △PQR मध्ये रेषा l ∥ बाजू QR आणि रेषा l ही बाजू PQ ला X मध्ये व बाजू PR ला Y मध्ये छेदते.

साध्य : PX/XQ = PY/YR

रचना : रेख XR व रेख QY काढा.

सिद्धता : △PXY व △XQY हे समान उंचीचे त्रिकोण आहेत (Y हा सामाईक शिरोबिंदू असून पाया PX व XQ एकाच रेषा PQ वर आहेत).

∴ A(△PXY)/A(△XQY) = PX/XQ ...(I) (क्षेत्रफळे पायांच्या प्रमाणात)

तसेच, △PXY व △YXR हे समान उंचीचे त्रिकोण आहेत (X हा सामाईक शिरोबिंदू असून पाया PY व YR रेषा PR वर आहेत).

∴ A(△PXY)/A(△YXR) = PY/YR ...(II) (क्षेत्रफळे पायांच्या प्रमाणात)

△XQY व △YXR यांचा रेख XY हा समान पाया आहे आणि रेख XY ∥ बाजू QR.

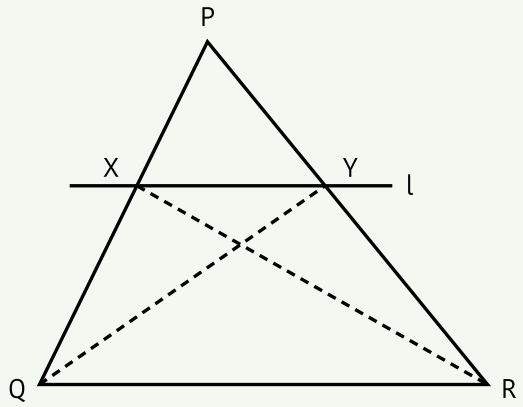
∴ △XQY व △YXR यांची उंची समान आहे.

∴ A(△XQY) = A(△YXR) ...(III)

∴ A(△PXY)/A(△XQY) = A(△PXY)/A(△YXR) ...[(I), (II) व (III) वरून]

∴ PX/XQ = PY/YR ...[(I) व (II) वरून]

हे सिद्ध झाले. (हेच प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय आहे.)



गुणदान: आकृती – 1 गुण · पक्ष, साध्य व रचना – 1 गुण · कारणासह गुणोत्तरे (I) व (II) – 1 गुण · समान क्षेत्रफळे (III) व निष्कर्ष – 1 गुण

परीक्षकांचा सल्ला: रचना (रेख XR व रेख QY) लिहायला विसरू नका; तिच्याशिवाय क्षेत्रफळांची गुणोत्तरे लिहिता येत नाहीत.

(2) △ABC चे शिरोबिंदू A(10, 13), B(−3, 4) व C(5, −2) आहेत. रेख AD ही △ABC ची मध्यगा आहे आणि G हा त्याचा मध्यगासंपातबिंदू आहे.

(अ) D चे निर्देशक व मध्यगा AD ची लांबी काढा.

(ब) G चे निर्देशक काढा.

(क) AG : GD = 2 : 1 याचा पडताळा घ्या.

उत्तर (4 गुण)

(अ) रेख AD ही मध्यगा आहे, म्हणून D हा रेख BC चा मध्यबिंदू आहे.

D = ((−3 + 5)/2, (4 + (−2))/2) = (2/2, 2/2) = (1, 1)

AD = $\sqrt{[(10-1)^2 + (13-1)^2]}$ = $\sqrt{(81 + 144)}$ = $\sqrt{225}$ = 15 एकक

(ब) मध्यगासंपातबिंदूच्या सूत्रानुसार,

G = ((10 + (−3) + 5)/3, (13 + 4 + (−2))/3) = (12/3, 15/3) = (4, 5)

(क) $AG = \sqrt{[(10-4)^2 + (13-5)^2]} = \sqrt{(36+64)} = \sqrt{100} = 10$

$GD = \sqrt{[(4-1)^2 + (5-1)^2]} = \sqrt{(9+16)} = \sqrt{25} = 5$

$\therefore AG : GD = 10 : 5 = 2 : 1$. यावरून AG : GD = 2 : 1 हे पडताळले.

गुणदान: D(1, 1) – 1 गुण · AD = 15 एकक – 1 गुण · G(4, 5) – 1 गुण · AG = 10, GD = 5 व AG : GD = 2 : 1 – 1 गुण

परीक्षकांचा सल्ला: मध्यगा शिरोबिंदूला समोरील बाजूच्या मध्यबिंदूशी जोडते; आधी D काढा, नंतर तिन्ही शिरोबिंदू घेऊन मध्यगासंपातबिंदूचे सूत्र वापरा.

(3) $\triangle XYZ \sim \triangle X'YZ'$. $\triangle XYZ$ मध्ये XY = 5 सेमी, YZ = 7.5 सेमी व XZ = 6 सेमी आणि $YZ/YZ' = 5/3$. तर $\triangle XYZ$ व $\triangle X'YZ'$ काढा.

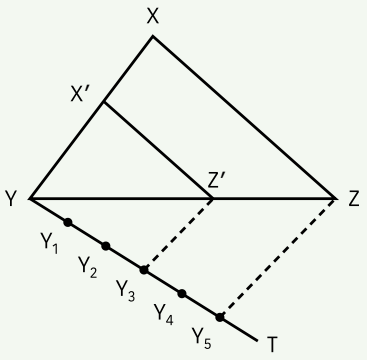
उत्तर (4 गुण)

कच्ची आकृती व विश्लेषण : $\triangle XYZ \sim \triangle X'YZ'$, $\therefore \angle XYZ \cong \angle X'YZ'$ आणि $XY/X'Y = YZ/YZ' = XZ/X'Z' = 5/3$. $\triangle X'YZ'$ च्या बाजू लहान आहेत. बिंदू X′ व Z′ हे अनुक्रमे रेख YX व रेख YZ वर आहेत आणि $X'Z' \parallel XZ$. (YZ′ = 4.5 सेमी, X′Y = 3 सेमी, X′Z′ = 3.6 सेमी.)

रचनेच्या पायऱ्या :

1. रेख YZ = 7.5 सेमी काढा. Y केंद्र व 5 सेमी त्रिज्या घेऊन आणि Z केंद्र व 6 सेमी त्रिज्या घेऊन एकमेकांना X मध्ये छेदणारे कंस काढा. XY व XZ जोडा. $\triangle XYZ$ तयार झाला.
2. X च्या विरुद्ध बाजूस YZ शी लघुकोन करणारा किरण YT काढा.
3. किरण YT वर Y पासून सुरुवात करून Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 असे 5 समान भाग करा.
4. रेख Y_5Z काढा.
5. Y_3 मधून रेख Y_5Z ला समांतर रेषा काढा; ती रेख YZ ला Z′ मध्ये छेदते.
6. Z′ मधून बाजू ZX ला समांतर रेषा काढा; ती रेख YX ला X′ मध्ये छेदते.

$\triangle X'YZ'$ हा अपेक्षित त्रिकोण आहे. (मोजल्यास YZ′ = 4.5 सेमी, X′Y = 3 सेमी.)



गुणदान: विश्लेषणासह कच्ची आकृती – 1 गुण · $\triangle XYZ$ ची रचना – 1 गुण · किरण YT वर 5 समान भाग व Y_3 मधून Y_5Z ला समांतर रेषा – 1 गुण · ZX ला समांतर रेषा Z′X′ व $\triangle X'YZ'$ पूर्ण करणे – 1 गुण

परीक्षकांचा सल्ला: YZ/YZ′ = 5/3 असल्याने किरणावर 5 (मोठी संख्या) समान भाग करा, 5 व्या बिंदूला Z शी जोडा आणि 3 ऱ्या बिंदूतून समांतर रेषा काढा.

प्र. 5 खालील उपप्रश्न सोडवा. (कोणताही एक) **[3]**

(1) विज्ञान प्रदर्शनासाठी स्नेहा सूक्ष्मछिद्र कॅमेरा (पिनहोल कॅमेरा) तयार करते. छिद्र O आणि 6 मी उंच झाड AB चा बुंधा B एकाच पातळीत आहेत; झाड छिद्रापासून 15 मी अंतरावर आहे. पडदा उभा असून छिद्राच्या मागे 25 सेमी अंतरावर आहे. झाडाची प्रतिमा A′B′ पडद्यावर उलटी तयार होते, म्हणजे A, O, A′ हे बिंदू एकरेषीय आहेत व B, O, B′ हे बिंदूही एकरेषीय आहेत.

(अ) दिलेल्या माहितीवरून आकृती काढा.

(ब) समरूप त्रिकोणांची नावे लिहा व समरूपतेची कसोटी लिहा.

(क) प्रतिमा A′B′ ची उंची सेमीमध्ये काढा.

उत्तर (3 गुण)

(अ) आकृतीत, AB = 6 मी हे झाड आहे, O हे छिद्र आहे, A′B′ ही पडद्यावरील प्रतिमा आहे; BO = 15 मी, OB′ = 25 सेमी = 0.25 मी.

(ब) △ABO व △A′B′O मध्ये,

∠ABO ≅ ∠A′B′O ...(प्रत्येकी 90° : झाड व पडदा उभे आहेत)

∠AOB ≅ ∠A′OB′ ...(परस्पर विरुद्ध कोन)

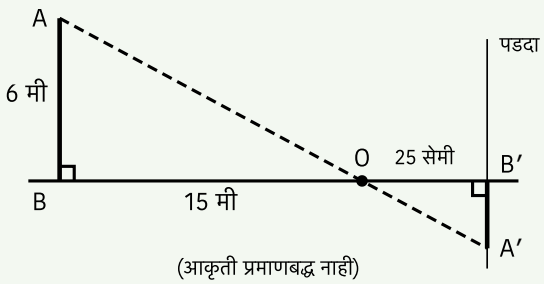
∴ △ABO ~ △A′B′O ...(कोको कसोटी)

(क) ∴ AB/A′B′ = BO/B′O ...(समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू प्रमाणात असतात)

∴ 6/A′B′ = 15/0.25

∴ A′B′ = (6 × 0.25)/15 = 0.1 मी

∴ प्रतिमेची उंची = 0.1 मी = 10 सेमी.



गुणदान: (अ) योग्य आकृती – 1 गुण · (ब) कोको कसोटीसह △ABO ~ △A′B′O – 1 गुण · (क) प्रतिमेची उंची = 10 सेमी – 1 गुण

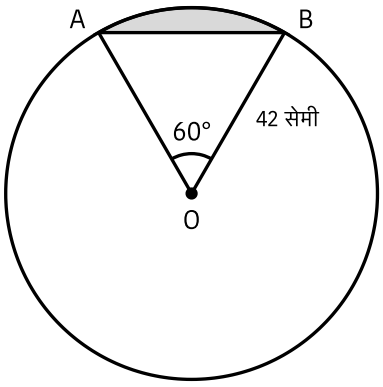
परीक्षकांचा सल्ला: प्रमाण मांडण्यापूर्वी 25 सेमी चे 0.25 मी मध्ये रूपांतर करा (किंवा 15 मी चे 1500 सेमी करा); एकके मिसळल्यास उत्तर चुकते.

(2) रांगोळी स्पर्धेसाठी 42 सेमी त्रिज्येचा एक वर्तुळाकार फलक सजवायचा आहे. आकृतीत, O हे फलकाचे केंद्र आहे आणि जीवा AB केंद्राशी ∠AOB = 60° मापाचा कोन करते. जीवा AB मुळे तयार झालेला लघुवर्तुळखंड (रेखांकित भाग) रंगीत रांगोळीने भरायचा आहे.

(अ) वर्तुळपाकळी O-AB चे क्षेत्रफळ काढा.

(ब) △OAB चे क्षेत्रफळ काढा.

(क) रेखांकित वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ काढा. (π = 22/7, √3 = 1.73)



उत्तर (3 गुण)

$r = 42$ सेमी, $\theta = 60°$

(अ) वर्तुळपाकळी O-AB चे क्षेत्रफळ $= (\theta/360) \times \pi r^2 = (60/360) \times (22/7) \times 42 \times 42 = (1/6) \times 5544 = 924$ चौसेमी

(ब) $\triangle OAB$ मध्ये, $OA = OB$ (त्रिज्या) व $\angle AOB = 60°$, म्हणून $\angle OAB = \angle OBA = 60°$. $\therefore \triangle OAB$ हा 42 सेमी बाजू असलेला समभुज त्रिकोण आहे.

$A(\triangle OAB) = (\sqrt{3}/4) \times 42^2 = (1.73 \times 1764)/4 = 3051.72/4 = 762.93$ चौसेमी

(क) वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ = वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ − $A(\triangle OAB) = 924 - 762.93 = 161.07$ चौसेमी

$\therefore$ रेखांकित वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ = 161.07 चौसेमी.

गुणदान: (अ) वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ 924 चौसेमी – 1 गुण · (ब) $A(\triangle OAB) = 762.93$ चौसेमी – 1 गुण · (क) वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ = 161.07 चौसेमी – 1 गुण

परीक्षकांचा सल्ला: $(\sqrt{3}/4)a^2$ वापरण्यापूर्वी $\triangle OAB$ समभुज का आहे (त्रिज्या समान व त्यांमधील कोन 60°) हे दाखवा.

परीक्षेसाठी खूप खूप शुभेच्छा!