गणित भाग II (भूमिती)

दहावी (SSC) बोर्ड परीक्षा मार्च 2027 – सराव प्रश्नपत्रिका

आदर्श उत्तरपत्रिका

वेळ: 2 तास **एकूण गुण: 40**

आदर्श उत्तरात एक योग्य पद्धत दाखवली आहे; इतर कोणतीही योग्य पद्धत असल्यास पूर्ण गुण मिळतात.

प्र. 1 (अ) खालील प्रत्येक उपप्रश्नासाठी चार पर्यायी उत्तरे दिली आहेत. त्यांपैकी अचूक पर्याय निवडून त्याचे वर्णाक्षर उपप्रश्नाच्या क्रमांकासह लिहा. **[4]**

(1) जर △ABC ~ △PQR आणि AB : PQ = 4 : 9, तर A(△ABC) : A(△PQR) = ?

(A) 2 : 3 (B) 4 : 9
(C) 16 : 81 (D) 81 : 16

उत्तर (1 गुण)
(C) 16 : 81
समरूप त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर त्यांच्या संगत बाजूंच्या वर्गांच्या गुणोत्तराएवढे असते : $4^2 : 9^2 = 16 : 81$.

(2) खालीलपैकी कोणते पायथागोरसचे त्रिकुट आहे?

(A) (5, 12, 14) (B) (7, 24, 25)
(C) (6, 8, 11) (D) (9, 12, 16)

उत्तर (1 गुण)
(B) (7, 24, 25)
$7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 = 25^2$.

(3) वर्तुळाचा एक कंस केंद्राशी 130° मापाचा कोन करतो. त्याच कंसाला अंतर्खंडित करणाऱ्या अंतर्लिखित कोनाचे माप किती?

(A) 130° (B) 65°
(C) 115° (D) 50°

उत्तर (1 गुण)
(B) 65°
अंतर्लिखित कोनाचे माप त्याने अंतर्खंडित केलेल्या कंसाच्या मापाच्या निम्मे असते : ½ × 130° = 65°.

(4) बिंदू (−8, 15) चे आरंभबिंदूपासूनचे अंतर किती?

(A) 7 (B) 23
(C) 17 (D) 13

उत्तर (1 गुण)
(C) 17
अंतर = $\sqrt{((-8)^2 + 15^2)} = \sqrt{(64 + 225)} = \sqrt{289} = 17$.

प्र. 1 (ब) खालील उपप्रश्न सोडवा. **[4]**

(1) जर $\cos\theta = 5/13$, तर $\sec\theta$ ची किंमत काढा.

उत्तर (1 गुण)
$\sec\theta = 1/\cos\theta = 1 \div (5/13)$
$\therefore \sec\theta = 13/5$

(2) ज्या वृत्तचितीची त्रिज्या 7 सेमी व उंची 10 सेमी आहे, तिचे वक्रपृष्ठफळ काढा. ($\pi = 22/7$)

उत्तर (1 गुण)
वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ = $2\pi rh = 2 \times 22/7 \times 7 \times 10$
∴ वक्रपृष्ठफळ = 440 चौसेमी

(3) A(2, 3) व B(6, 11) या बिंदूंतून जाणाऱ्या रेषेचा चढ काढा.

उत्तर (1 गुण)
चढ = $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) = (11 - 3)/(6 - 2) = 8/4$
∴ रेषा AB चा चढ = 2

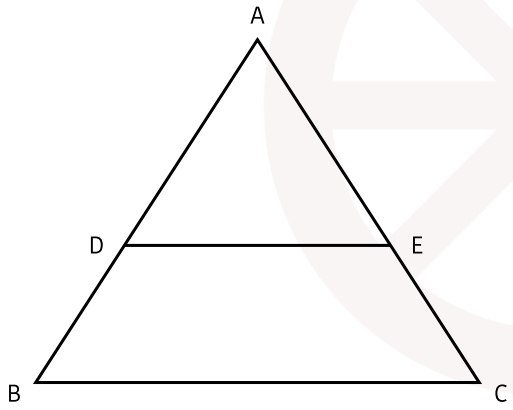
(4) 6 सेमी व 2 सेमी त्रिज्या असलेली दोन वर्तुळे एकमेकांना आतून स्पर्श करतात. त्यांच्या केंद्रांमधील अंतर काढा.

उत्तर (1 गुण)
आतून स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळांच्या केंद्रांमधील अंतर = त्रिज्यांचा फरक = 6 − 2
∴ केंद्रांमधील अंतर = 4 सेमी

प्र. 2 (अ) खालील उपकृती पूर्ण करा. (कोणत्याही दोन) **[4]**

(1) आकृतीत, △ABC मध्ये रेख DE ∥ बाजू BC. जर AD = 6, DB = 4 व AE = 9, तर EC काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

कृती : △ABC मध्ये, रेख DE ∥ बाजू BC ...(दिलेले)
∴ AD/DB = ☐/EC ...(☐)
∴ 6/4 = 9/EC
∴ EC = (☐ × 4)/6
∴ EC = ☐



उत्तर (2 गुण)
△ABC मध्ये, रेख DE ∥ बाजू BC ...(दिलेले)
∴ AD/DB = **AE**/EC ...(**प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय**)
∴ 6/4 = 9/EC
∴ EC = (**9** × 4)/6
∴ EC = **6**
गुणदान: प्रत्येक योग्य चौकट – ½ गुण (4 चौकटी × ½ = 2 गुण)
परीक्षकांचा सल्ला: प्रमेयाचे पूर्ण नाव (प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय) लिहा; फक्त संक्षिप्त रूप लिहिल्यास गुण न मिळण्याची शक्यता असते.

(2) जर $\sin\theta = 3/5$ आणि θ हा लघुकोन असेल, तर $\cos\theta$ व $\tan\theta$ काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

कृती : $\sin^2\theta + \cos^2\theta =$ ☐

$\therefore (3/5)^2 + \cos^2\theta = 1$

$\therefore \cos^2\theta = 1 - 9/25 =$ ☐

$\therefore \cos\theta =$ ☐ ...(θ लघुकोन आहे)

$\tan\theta = \sin\theta/\cos\theta = (3/5) \div (4/5)$

$\therefore \tan\theta =$ ☐

उत्तर (2 गुण)

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \mathbf{1}$

$\therefore (3/5)^2 + \cos^2\theta = 1$

$\therefore \cos^2\theta = 1 - 9/25 = \mathbf{16/25}$

$\therefore \cos\theta = \mathbf{4/5}$ ...(θ लघुकोन आहे)

$\tan\theta = \sin\theta/\cos\theta = (3/5) \div (4/5)$

$\therefore \tan\theta = \mathbf{3/4}$

गुणदान: प्रत्येक योग्य चौकट – ½ गुण (4 चौकटी × ½ = 2 गुण)

परीक्षकांचा सल्ला: θ लघुकोन असल्यामुळे $\cos\theta$ साठी फक्त धन वर्गमूळ घ्या.

(3) आकृतीत, O केंद्र असलेले वर्तुळ रेषा PA ला बिंदू A मध्ये स्पर्श करते. जर OA = 5 व OP = 13, तर PA काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

कृती : रेख OA ही त्रिज्या आहे व रेषा PA ही A बिंदूतील स्पर्शिका आहे.

$\therefore \angle OAP =$ ☐ ...(स्पर्शिका-त्रिज्या प्रमेय)

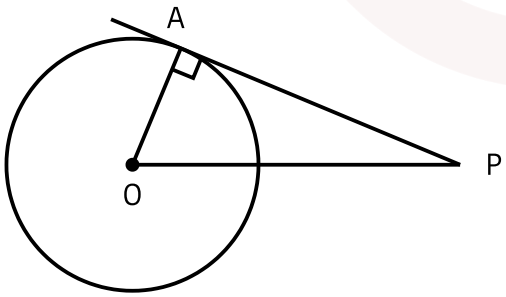
$\triangle OAP$ मध्ये, पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार,

$OP^2 = OA^2 +$ ☐

$\therefore 13^2 = 5^2 + PA^2$

$\therefore PA^2 = 169 - 25 =$ ☐

$\therefore PA =$ ☐



उत्तर (2 गुण)

रेख OA ही त्रिज्या आहे व रेषा PA ही A बिंदूतील स्पर्शिका आहे.

$\therefore \angle OAP = \mathbf{90°}$ ...(स्पर्शिका-त्रिज्या प्रमेय)

$\triangle OAP$ मध्ये, पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार,

$OP^2 = OA^2 + \mathbf{PA^2}$

$\therefore 13^2 = 5^2 + PA^2$

$\therefore PA^2 = 169 - 25 = \mathbf{144}$

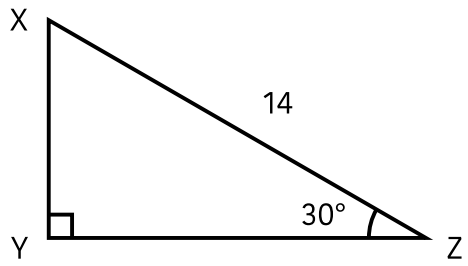
$\therefore PA = \mathbf{12}$

गुणदान: प्रत्येक योग्य चौकट – ½ गुण (4 चौकटी × ½ = 2 गुण)

परीक्षकांचा सल्ला: वर्तुळाच्या कोणत्याही बिंदूतील स्पर्शिका त्या बिंदूतून जाणाऱ्या त्रिज्येला लंब असते; त्यामुळेच △OAP काटकोन त्रिकोण होतो.

प्र. 2 (ब) खालील उपप्रश्न सोडवा. (कोणतेही चार) **[8]**

(1) आकृतीत, △XYZ मध्ये ∠XYZ = 90°, ∠XZY = 30° व XZ = 14. तर XY व YZ काढा.



उत्तर (2 गुण)

△XYZ मध्ये, ∠Y = 90°, ∠Z = 30°, ∴ ∠X = 60°.

∴ △XYZ हा 30°–60°–90° मापाचा त्रिकोण आहे.

30°–60°–90° प्रमेयानुसार,

XY = ½ × XZ ...(30° मापाच्या कोनासमोरील बाजू)

∴ XY = ½ × 14 = 7

YZ = (√3/2) × XZ ...(60° मापाच्या कोनासमोरील बाजू)

∴ YZ = (√3/2) × 14 = 7√3

∴ XY = 7 व YZ = 7√3

गुणदान: 30°–60°–90° मापाचा त्रिकोण / प्रमेय ओळखणे – ½ गुण · XY = 7 – ½ गुण · YZ साठी सूत्र – ½ गुण · YZ = 7√3 – ½ गुण

परीक्षकांचा सल्ला: विद्यार्थी अनेकदा बाजूंची अदलाबदल करतात : 30° मापाच्या कोनासमोरील बाजू कर्णाच्या निम्मी असते.

(2) A(−2, 5) व B(8, −5) या बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषाखंडाचे 2 : 3 या गुणोत्तरात आंतर विभाजन करणाऱ्या बिंदू P चे निर्देशक काढा.

उत्तर (2 गुण)

समजा, बिंदू P(x, y) हा रेख AB चे m : n = 2 : 3 या गुणोत्तरात आंतर विभाजन करतो.

$A(x_1, y_1) = (-2, 5)$, $B(x_2, y_2) = (8, -5)$

विभाजनाच्या सूत्रानुसार,

$x = (mx_2 + nx_1)/(m + n) = (2 \times 8 + 3 \times (-2))/(2 + 3) = (16 - 6)/5 = 10/5 = 2$

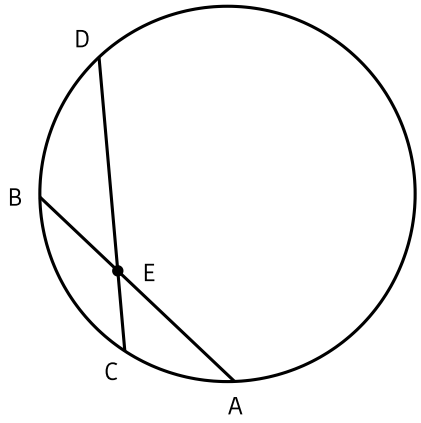
$y = (my_2 + ny_1)/(m + n) = (2 \times (-5) + 3 \times 5)/(2 + 3) = (-10 + 15)/5 = 5/5 = 1$

∴ बिंदू P चे निर्देशक (2, 1) आहेत.

गुणदान: विभाजनाचे सूत्र – ½ गुण · किमती ठेवणे – ½ गुण · x = 2 – ½ गुण · y = 1 – ½ गुण

परीक्षकांचा सल्ला: m ने B (दुसऱ्या बिंदू) च्या निर्देशकांना गुणा, A च्या नव्हे.

(3) आकृतीत, वर्तुळाच्या जीवा AB व जीवा CD वर्तुळाच्या अंतर्भागात बिंदू E मध्ये छेदतात. जर AE = 6, EB = 4 व CE = 3, तर ED काढा.



उत्तर (2 गुण)

जीवा AB व जीवा CD वर्तुळाच्या अंतर्भागात बिंदू E मध्ये छेदतात.

∴ AE × EB = CE × ED ...(जीवांच्या अंतर्छेदनाचे प्रमेय)

∴ 6 × 4 = 3 × ED

∴ 24 = 3 × ED

∴ ED = 24/3 = 8

∴ ED = 8

गुणदान: योग्य प्रमेय व AE × EB = CE × ED हे विधान – 1 गुण · किमती ठेवणे – ½ गुण · ED = 8 – ½ गुण

परीक्षकांचा सल्ला: प्रत्येक गुणाकारात एकाच जीवेचे दोन भाग घ्या. पाठ्यपुस्तकात याला जीवांच्या अंतर्छेदनाचे प्रमेय म्हटले आहे; या प्रमेयाला वर्तुळाच्या अंतर्भागात छेदणाऱ्या जीवांचे प्रमेय असेही म्हणतात.

(4) एका वर्तुळाची त्रिज्या 12 सेमी आहे. या वर्तुळाच्या ज्या वर्तुळपाकळीचा केंद्रीय कोन 60° आहे, तिचे क्षेत्रफळ काढा. (π = 3.14)

उत्तर (2 गुण)

r = 12 सेमी, θ = 60°

वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ = $(\theta/360) \times \pi r^2$

= (60/360) × 3.14 × 12 × 12

= (1/6) × 3.14 × 144

= 3.14 × 24

∴ वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ = 75.36 चौसेमी

गुणदान: सूत्र – ½ गुण · किमती ठेवणे – ½ गुण · सरळरूप – ½ गुण · एककासह उत्तर – ½ गुण

परीक्षकांचा सल्ला: अंतिम उत्तरासोबत चौसेमी हे एकक लिहा.

(5) △ABC ~ △PQR. A(△ABC) = 81 चौसेमी व A(△PQR) = 144 चौसेमी. जर BC = 9 सेमी, तर QR काढा.

उत्तर (2 गुण)

△ABC ~ △PQR ...(दिलेले)

∴ $A(\triangle ABC)/A(\triangle PQR) = BC^2/QR^2$ ...(समरूप त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे प्रमेय)

∴ $81/144 = 9^2/QR^2$

∴ 9/12 = 9/QR ...(वर्गमूळ घेऊन)

∴ QR = 12 सेमी

गुणदान: योग्य प्रमेय / गुणोत्तर – 1 गुण · किमती ठेवणे व वर्गमूळ – ½ गुण · QR = 12 सेमी – ½ गुण

परीक्षकांचा सल्ला: क्षेत्रफळे संगत बाजूंच्या वर्गांच्या प्रमाणात असतात; बाजूंची तुलना करण्यापूर्वी वर्गमूळ घ्या.

प्र. 3 (अ) खालील उपकृती पूर्ण करा. (कोणतीही एक) **[3]**

(1) आकृतीत, □ABCD हा समभुज चौकोन आहे. त्याचे कर्ण AC व BD बिंदू O मध्ये छेदतात. $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$ हे सिद्ध करण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

कृती : समभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांचे लंबदुभाजक असतात.

∴ △AOB मध्ये, ∠AOB = [ ], AO = ½ AC व BO = [ ]

$AB^2 = AO^2 +$ [ ] ...(पायथागोरसचे प्रमेय)

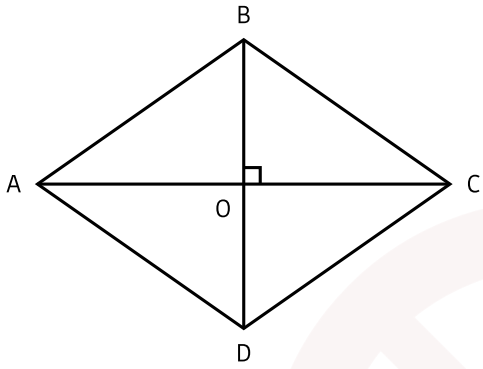
∴ $AB^2 = (½\ AC)^2 + (½\ BD)^2$

∴ $AB^2 =$ [ ]/4

∴ $4AB^2 = AC^2 + BD^2$

परंतु AB = BC = CD = DA ...([ ])

∴ $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$



उत्तर (3 गुण)

समभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांचे लंबदुभाजक असतात.

∴ △AOB मध्ये, ∠AOB = **90°**, AO = ½ AC व BO = **½ BD**

$AB^2 = AO^2 +$ **BO^2** ...(पायथागोरसचे प्रमेय)

∴ $AB^2 = (½\ AC)^2 + (½\ BD)^2$

∴ $AB^2 =$ **$(AC^2 + BD^2)$**/4

∴ $4AB^2 = AC^2 + BD^2$

परंतु AB = BC = CD = DA ...(**समभुज चौकोनाच्या बाजू एकरूप असतात**)

∴ $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 4AB^2 = AC^2 + BD^2$

हे सिद्ध झाले.

गुणदान: ∠AOB = 90° – ½ गुण · BO = ½ BD – ½ गुण · BO^2 – ½ गुण · $(AC^2 + BD^2)$ – ½ गुण · कारण : समभुज चौकोनाच्या बाजू एकरूप असतात – 1 गुण

परीक्षकांचा सल्ला: शेवटी "हे सिद्ध झाले" असे लिहा आणि AB = BC = CD = DA चे कारण लिहायला विसरू नका.

(2) $\sin\theta/(1-\cos\theta) - \sin\theta/(1+\cos\theta) = 2\cot\theta$ हे सिद्ध करण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

कृती : डावी बाजू = $\sin\theta/(1-\cos\theta) - \sin\theta/(1+\cos\theta)$

= $[\sin\theta(1+\cos\theta) - \sin\theta(1-\cos\theta)] / [(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)]$

= $(\sin\theta + \sin\theta\cos\theta - \sin\theta + \sin\theta\cos\theta)/(1 - \square)$

= $\square/\sin^2\theta$ ...($\because 1 - \cos^2\theta = \square$)

= $2\cos\theta/\sin\theta$

= $2\ \square$

= उजवी बाजू

उत्तर (3 गुण)

डावी बाजू = $\sin\theta/(1-\cos\theta) - \sin\theta/(1+\cos\theta)$

= $[\sin\theta(1+\cos\theta) - \sin\theta(1-\cos\theta)] / [(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)]$

= $(\sin\theta + \sin\theta\cos\theta - \sin\theta + \sin\theta\cos\theta)/(1 - \mathbf{\cos^2\theta})$

= $\mathbf{2\sin\theta\cos\theta}/\sin^2\theta$ ...($\because 1 - \cos^2\theta = \mathbf{\sin^2\theta}$)

= $2\cos\theta/\sin\theta$

= $2\ \mathbf{\cot\theta}$

= उजवी बाजू

$\therefore \sin\theta/(1-\cos\theta) - \sin\theta/(1+\cos\theta) = 2\cot\theta$. हे सिद्ध झाले.

गुणदान: $\cos^2\theta$ – ½ गुण · $2\sin\theta\cos\theta$ – 1 गुण · $\sin^2\theta$ – 1 गुण · $\cot\theta$ – ½ गुण

परीक्षकांचा सल्ला: $(1-\cos\theta)(1+\cos\theta) = 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$ हे वापरा; कंस सोडवताना चिन्हांच्या चुका सर्वांत जास्त होतात.

प्र. 3 (ब) खालील उपप्रश्न सोडवा. (कोणतेही दोन) **[6]**

(1) $\triangle ABC$ असा काढा की, BC = 6 सेमी, $\angle ABC = 60°$ व AB = 4.5 सेमी. $\triangle ABC \sim \triangle PBQ$ आणि $BC/BQ = 3/4$ असेल असा $\triangle PBQ$ काढा.

उत्तर (3 गुण)

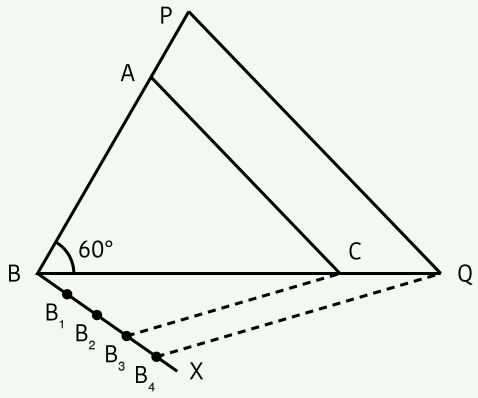
कच्ची आकृती व विश्लेषण : $\triangle ABC \sim \triangle PBQ$, $\therefore \angle ABC = \angle PBQ = 60°$ आणि $AB/PB = BC/BQ = AC/PQ = 3/4$.

म्हणून $BQ = (4/3) \times 6 = 8$ सेमी व $PB = (4/3) \times 4.5 = 6$ सेमी. बिंदू P व Q हे अनुक्रमे किरण BA व किरण BC वर आहेत.

रचनेच्या पायऱ्या :

1. रेख BC = 6 सेमी काढा.
2. B बिंदूपाशी $\angle ABC = 60°$ होईल असा किरण BA काढा आणि AB = 4.5 सेमी होईल असा बिंदू A घ्या. रेख AC काढा. $\triangle ABC$ तयार झाला.
3. A च्या विरुद्ध बाजूस BC शी लघुकोन करणारा किरण BX काढा.
4. किरण BX वर B पासून सुरुवात करून B_1, B_2, B_3, B_4 असे 4 समान भाग करा.
5. रेख B_3C काढा.
6. B_4 मधून रेख B_3C ला समांतर रेषा काढा; ती किरण BC ला Q मध्ये छेदते.
7. Q मधून रेख CA ला समांतर रेषा काढा; ती किरण BA ला P मध्ये छेदते.

$\triangle PBQ$ हा अपेक्षित त्रिकोण आहे (BQ = 8 सेमी, BP = 6 सेमी, $\angle PBQ = 60°$).



गुणदान: विश्लेषणासह कच्ची आकृती – 1 गुण · △ABC ची रचना – 1 गुण · △PBQ ची रचना (समान भाग व समांतर रेषा) – 1 गुण

परीक्षकांचा सल्ला: रचनेच्या खुणा पुसू नका; आधी कच्ची आकृती काढा आणि किरण BX वरील 4 समान भाग स्पष्ट दाखवा.

(2) P(−2, 1), Q(1, 5) व R(5, 2) हे बिंदू समद्विभुज काटकोन त्रिकोणाचे शिरोबिंदू आहेत, हे दाखवा.

उत्तर (3 गुण)

अंतराच्या सूत्रानुसार,

$PQ = \sqrt{[(1-(-2))^2 + (5-1)^2]} = \sqrt{(9+16)} = \sqrt{25} = 5$

$QR = \sqrt{[(5-1)^2 + (2-5)^2]} = \sqrt{(16+9)} = \sqrt{25} = 5$

$PR = \sqrt{[(5-(-2))^2 + (2-1)^2]} = \sqrt{(49+1)} = \sqrt{50}$

$PQ = QR$ ...(I)

$PQ^2 + QR^2 = 25 + 25 = 50 = PR^2$

∴ पायथागोरसच्या प्रमेयाच्या व्यत्यासानुसार △PQR हा काटकोन त्रिकोण असून ∠Q हा काटकोन आहे. ...(II)

(I) व (II) वरून, P, Q व R हे समद्विभुज काटकोन त्रिकोणाचे शिरोबिंदू आहेत.

गुणदान: PQ, QR व PR (प्रत्येकी ½ गुण) – 1½ गुण · $PQ = QR$ दाखवणे – ½ गुण · $PQ^2 + QR^2 = PR^2$, पायथागोरसच्या प्रमेयाचा व्यत्यास व निष्कर्ष – 1 गुण

परीक्षकांचा सल्ला: काटकोनाचा निष्कर्ष काढताना पायथागोरसच्या प्रमेयाचा व्यत्यास असे कारण लिहा.

(3) △ABC मध्ये रेख AD ही मध्यगा आहे. जर AB = 11, AC = 17 व BC = 12, तर AD काढा.

उत्तर (3 गुण)

रेख AD ही △ABC ची मध्यगा आहे.

∴ D हा BC चा मध्यबिंदू आहे, म्हणून $BD = \frac{1}{2} \times BC = \frac{1}{2} \times 12 = 6$

अपोलोनियसच्या प्रमेयानुसार,

$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2$

$\therefore 11^2 + 17^2 = 2AD^2 + 2 \times 6^2$

$\therefore 121 + 289 = 2AD^2 + 72$

$\therefore 410 - 72 = 2AD^2$

$\therefore 2AD^2 = 338$

$\therefore AD^2 = 169$

$\therefore AD = 13$

गुणदान: BD = 6 – ½ गुण · अपोलोनियसच्या प्रमेयाचे विधान – 1 गुण · किमती ठेवणे – ½ गुण · AD = 13 – 1 गुण

परीक्षकांचा सल्ला: अपोलोनियसच्या प्रमेयात BC नव्हे, तर BD (BC चा निम्मा भाग) वापरा.

(4) 6 सेमी त्रिज्येचा धातूचा भरीव गोल वितळवून त्यापासून 3 सेमी त्रिज्या व 4 सेमी उंची असलेले भरीव शंकू तयार केले. असे किती शंकू तयार होतील?

उत्तर (3 गुण)

गोलाची त्रिज्या R = 6 सेमी; शंकूची त्रिज्या r = 3 सेमी, उंची h = 4 सेमी.

गोलाचे घनफळ = $(4/3)\pi R^3 = (4/3)\pi \times 6^3 = (4/3)\pi \times 216 = 288\pi$ घसेमी

एका शंकूचे घनफळ = $(1/3)\pi r^2 h = (1/3)\pi \times 3^2 \times 4 = 12\pi$ घसेमी

शंकूंची संख्या = गोलाचे घनफळ/एका शंकूचे घनफळ = $288\pi/12\pi = 24$

∴ 24 शंकू तयार होतील.

गुणदान: गोलाचे घनफळ – 1 गुण · एका शंकूचे घनफळ – 1 गुण · शंकूंची संख्या = 24 – 1 गुण

परीक्षकांचा सल्ला: π तसाच ठेवा; तो भागाकारात रद्द होतो, त्यामुळे मोठा गुणाकार करावा लागत नाही.

प्र. 4 खालील उपप्रश्न सोडवा. (कोणतेही दोन) **[8]**

(1) चक्रीय चौकोनाचे संमुख कोन परस्परांचे पूरककोन असतात, हे सिद्ध करा.

उत्तर (4 गुण)

पक्ष : □ABCD हा चक्रीय चौकोन आहे.

साध्य : ∠BAD + ∠BCD = 180° आणि ∠ABC + ∠ADC = 180°

सिद्धता : अंतर्लिखित ∠BAD ने कंस BCD अंतर्खंडित केला आहे.

∴ ∠BAD = ½ m(कंस BCD) ...(I) (अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय)

अंतर्लिखित ∠BCD ने कंस BAD अंतर्खंडित केला आहे.

∴ ∠BCD = ½ m(कंस BAD) ...(II) (अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय)

(I) व (II) यांची बेरीज करून,

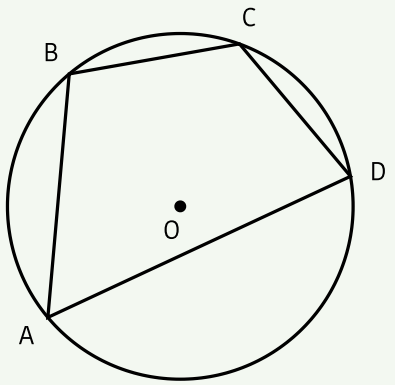
∠BAD + ∠BCD = ½ [m(कंस BCD) + m(कंस BAD)]

= ½ × 360° ...(कंस BCD व कंस BAD मिळून पूर्ण वर्तुळ होते)

∴ ∠BAD + ∠BCD = 180°

त्याचप्रमाणे, ∠ABC + ∠ADC = 180° (किंवा, चौकोनाच्या सर्व कोनांच्या मापांची बेरीज 360° असते, म्हणून ∠ABC + ∠ADC = 360° − 180° = 180°).

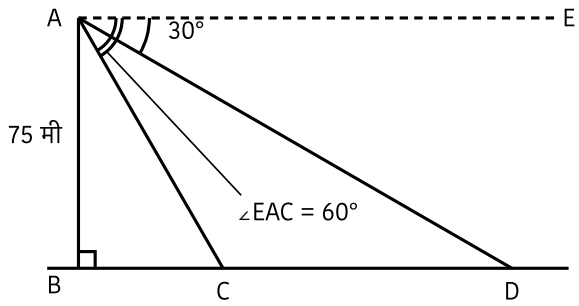
म्हणून, चक्रीय चौकोनाचे संमुख कोन परस्परांचे पूरककोन असतात.



गुणदान: आकृती – 1 गुण · पक्ष व साध्य – 1 गुण · अंतर्लिखित कोनांचे संबंध (I) व (II) – 1 गुण · बेरीज, कंसांची बेरीज 360° वापरणे, दोन्ही जोड्यांसाठी निष्कर्ष – 1 गुण

परीक्षकांचा सल्ला: प्रमेयाच्या सिद्धतेसाठी आकृती आवश्यक आहे. अंतर्खंडित कंसांची नावे (तीन अक्षरी) बरोबर लिहा.

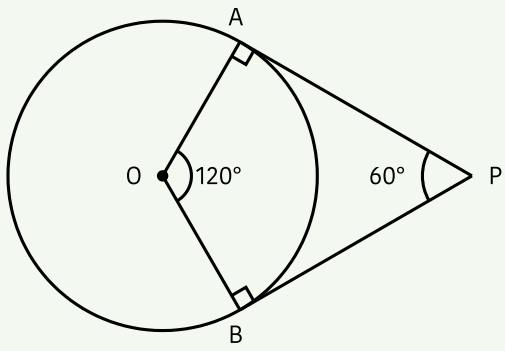
(2) 75 मी उंच दीपगृहाच्या माथ्यावरून, दीपगृहाच्या एकाच बाजूला व त्याच्या पायथ्याशी एका रेषेत असलेल्या दोन बोटींचे अवनत कोन 60° व 30° आहेत. तर दोन बोटींमधील अंतर काढा. ($\sqrt{3}$ = 1.73)
(आकृतीत, AB हे दीपगृह आहे, C व D या बोटी आहेत आणि AE ही A मधून जाणारी क्षितिजसमांतर रेषा आहे.)



उत्तर (4 गुण)
आकृतीत, AB हे दीपगृह आहे, AB = 75 मी. C व D या बोटी आहेत. AE ही A मधून जाणारी क्षितिजसमांतर रेषा आहे.
∠EAC = 60° व ∠EAD = 30° हे अवनत कोन आहेत.
AE || BD, ∴ ∠ACB = ∠EAC = 60° व ∠ADB = ∠EAD = 30° ...(व्युत्क्रम कोन)
काटकोन △ABC मध्ये,
tan 60° = AB/BC
∴ $\sqrt{3}$ = 75/BC
∴ BC = 75/$\sqrt{3}$ = 25$\sqrt{3}$ मी
काटकोन △ABD मध्ये,
tan 30° = AB/BD
∴ 1/$\sqrt{3}$ = 75/BD
∴ BD = 75$\sqrt{3}$ मी
CD = BD − BC = 75$\sqrt{3}$ − 25$\sqrt{3}$ = 50$\sqrt{3}$
∴ CD = 50 × 1.73 = 86.5 मी
∴ दोन बोटींमधील अंतर 86.5 मी आहे.
गुणदान: आकृती / व्युत्क्रम कोन – 1 गुण · BC = 25$\sqrt{3}$ मी – 1 गुण · BD = 75$\sqrt{3}$ मी – 1 गुण · CD = 50$\sqrt{3}$ = 86.5 मी – 1 गुण
परीक्षकांचा सल्ला: अवनत कोन निरीक्षकाच्या क्षितिजसमांतर रेषेपासून मोजला जातो; व्युत्क्रम कोनांच्या साहाय्याने तोच कोन बोटीपाशी मिळतो.

(3) O केंद्र व 3 सेमी त्रिज्या असलेले वर्तुळ काढा. वर्तुळाच्या बाह्यभागातील बिंदू P मधून ∠APB = 60° होईल अशा स्पर्शिका PA व PB काढा.

उत्तर (4 गुण)
विश्लेषण : □OAPB मध्ये, ∠OAP = ∠OBP = 90° ...(स्पर्शिका-त्रिज्या प्रमेय)
∴ ∠AOB = 360° − (90° + 90° + 60°) = 120°
(तसेच, △OAP मध्ये ∠OPA = 30°, म्हणून OP = 2 × OA = 6 सेमी.)
रचनेच्या पायऱ्या :
1. O केंद्र व 3 सेमी त्रिज्या घेऊन वर्तुळ काढा.
2. त्रिज्या OA काढा.
3. ∠AOB = 120° होईल अशी त्रिज्या OB काढा.
4. A बिंदूपाशी त्रिज्या OA ला लंब रेषा काढा.
5. B बिंदूपाशी त्रिज्या OB ला लंब रेषा काढा.
6. या दोन रेषांच्या छेदनबिंदूला P नाव द्या.
PA व PB या ∠APB = 60° असलेल्या अपेक्षित स्पर्शिका आहेत. (मोजल्यास OP = 6 सेमी.)

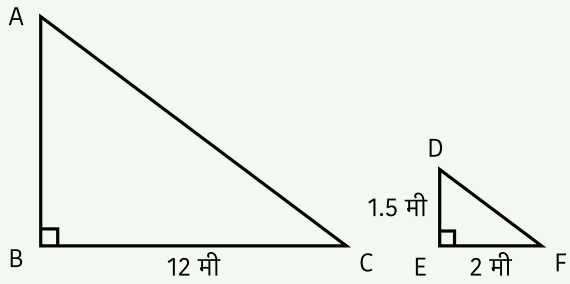


गुणदान: विश्लेषण : ∠AOB = 120° – 1 गुण · 3 सेमी त्रिज्येचे वर्तुळ व ∠AOB = 120° असलेल्या त्रिज्या – 1 गुण · A व B बिंदूंपाशी लंब रेषा – 1 गुण · स्पर्शिका P मध्ये छेदणे, नावे देणे – 1 गुण · दुसरी कोणतीही योग्य रचना (उदा. रेख OP च्या मध्यबिंदूचा वापर करून) केल्यास पूर्ण गुण द्यावेत.
परीक्षकांचा सल्ला: रचनेपूर्वी विश्लेषण (∠AOB = 120° दाखवणारी कच्ची आकृती) लिहा; त्याला गुण आहेत.

प्र. 5 खालील उपप्रश्न सोडवा. (कोणताही एक) **[3]**

(1) दिवसाच्या एका विशिष्ट वेळी 1.5 मी उंच मुलीची सपाट जमिनीवरील सावली 2 मी लांब पडते. त्याच वेळी एका उभ्या खांबाची सावली 12 मी लांब पडते.
(अ) दिलेल्या माहितीवरून आकृती काढा.
(ब) समरूप त्रिकोणांची नावे लिहा व समरूपतेची कसोटी लिहा.
(क) खांबाची उंची काढा.

उत्तर (3 गुण)
(अ) आकृतीत, AB हा खांब व BC ही त्याची सावली आहे; DE ही मुलगी व EF ही तिची सावली आहे. DE = 1.5 मी, EF = 2 मी, BC = 12 मी.
(ब) △ABC व △DEF मध्ये,
∠ABC = ∠DEF = 90° ...(खांब व मुलगी उभे आहेत)
∠ACB = ∠DFE ...(एकाच वेळी सूर्यकिरण समांतर असतात, म्हणून उन्नत कोन समान असतात)
∴ △ABC ~ △DEF ...(कोको कसोटी)
(क) ∴ AB/DE = BC/EF ...(समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू प्रमाणात असतात)
∴ AB/1.5 = 12/2
∴ AB = 1.5 × 6 = 9
∴ खांबाची उंची 9 मी आहे.



गुणदान: (अ) योग्य आकृती – 1 गुण · (ब) कोको कसोटीसह समरूप त्रिकोण – 1 गुण · (क) खांबाची उंची = 9 मी – 1 गुण
परीक्षकांचा सल्ला: संगती योग्य क्रमाने लिहा (△ABC ~ △DEF), म्हणजे बाजूंचे प्रमाण बरोबर येईल.

(2) एक कुटुंब 1.4 मी आतील व्यास व 2 मी उंची असलेल्या वृत्तचिती आकाराच्या टाकीत पाणी साठवते.
(अ) टाकीची त्रिज्या काढा व तिच्या घनफळाचे सूत्र लिहा.
(ब) टाकीची धारकता लीटरमध्ये काढा.
(क) जर कुटुंब दररोज 616 लीटर पाणी वापरत असेल, तर पूर्ण भरलेली टाकी किती दिवस पुरेल? ($\pi = 22/7$, 1 घमी = 1000 लीटर)

उत्तर (3 गुण)
(अ) त्रिज्या $r = 1.4/2 = 0.7$ मी, उंची $h = 2$ मी.
वृत्तचितीचे घनफळ = $\pi r^2 h$
(ब) घनफळ = $22/7 \times 0.7 \times 0.7 \times 2 = 22 \times 0.1 \times 0.7 \times 2 = 3.08$ घमी
धारकता = $3.08 \times 1000 = 3080$ लीटर
(क) दिवसांची संख्या = $3080/616 = 5$
∴ पूर्ण भरलेली टाकी 5 दिवस पुरेल.
गुणदान: (अ) त्रिज्या व सूत्र – 1 गुण · (ब) धारकता 3080 लीटर – 1 गुण · (क) 5 दिवस – 1 गुण
परीक्षकांचा सल्ला: व्यास नव्हे, त्रिज्या (0.7 मी) वापरा आणि भागाकार करण्यापूर्वी घमी चे लीटरमध्ये रूपांतर करा.

परीक्षेसाठी खूप खूप शुभेच्छा!